超流動^3He-Aに於る軌道角運動量について

石川, 正勝

超流動 ^{3}He－A に於る軌道角運動量について

名大物理　　石　川　正　勝

（10月20日受理）

Ⅰ。 ^{3}He－A の顕著な特徴の一つとして，Cooper 対が消失しない相対軌道角運動量を持ち，“強磁性的”長距離秩序状態にあることが挙げられる。その対状態はいわゆる Anderson－Brinkman－Morel state によって記述され，^{3}He－A の実験的諸事実を定性的に，あるいは定量的にかなり良く説明している。しかしその Cooper 対の構造についてはまだ十分に解明されたとは言えない状態にあると思われる。その一つとして系の全軌道角運動量あるいは軌道角運動量密度についての議論がある。この問題については古くはAnderson－Morel(1) によって，又最近 Leggett(2) によって考察されている。A－M の計算によると角運動量密度は $L = \hbar\ (\rho s/m)\ (Tc/E_F)$ によって与えられるがその計算の論拠が明確ではないように思われる。(3),(註) Leggett は２本の相対軌道角運動量演算子を用いて $L = \hbar\ (\Delta/E_F)\ (1/V)$ という結果を出しているが，これは系の大きさに関わりなく全軌道角運動量がオーダー１であることを示しており，角運動量が加算的量であり系の大きさ（粒子数）に比例する量であることと矛盾する。対相互作用の大きい極限で内部角運動量をもつ２原子分子のガスの秩序状態を仮想的に考えてみても明らかで，その場合には全角運動量は各分子の内部角運動量の和である。

以下我々の試みた計算結果を示し，$l_z = 1$ の軸対称 Cooper 対の構造に一定の解明を与え，合せてLeggett の議論に見られる誤りと思われる点を指摘する。簡単の為に議論を基底状態に限ることにする。

Ⅱ。まず系の全相対軌道角運動量の計算を行う。我々は系の全粒子数Nを固定した状態で考える。(4) 系の基底状態を

(註)　文献(1)では“correlation current の angular momentum”と表現し，同じものを文献(2)では“intrinsic orbital angular momentum”と呼んでいるが，これらは我々が以下で論じる観測される相対軌道角運動量とは異る様に思われる。

$$|\Phi_N> = \frac{1}{A_N}(Q^+)^{N/2}|0>, \quad <\Phi_N|\Phi_N> = 1 \tag{1}$$

で表わす。ここでQ^+は Cooper 対の生成演算子

$$Q^+ = \sum_{\alpha\beta}\iint d^3r_1 d^3r_2\, \varphi_\mu(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1)\, \chi^\mu_{\beta\alpha}\, \psi^+_\alpha(\mathbf{r}_1)\, \psi^+_\beta(\mathbf{r}_2) \tag{2}$$

である。$\chi^\mu_{\beta\alpha} = (\sigma_\mu\, i\sigma_y)_{\beta\alpha}$ はスピン状態μの対スピン波動関数，$\varphi_\mu(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1)$ は対軌道波動関数である。又A_N は規格化因子である。系の全軌道角運動量は

$$\begin{aligned}<\mathbf{L}> &\equiv <\Phi_N|\mathbf{L}|\Phi_N> \\ &= \sum_\alpha \iint d^3r d^3r'\, \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\, \mathbf{r} \times (-i\hbar \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}) <\Phi_N|\psi^+_\alpha(\mathbf{r}')\, \psi_\alpha(\mathbf{r})|\Phi_N>\end{aligned} \tag{3}$$

で与えられるから，1体の density matrix

$$\phi^N(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \equiv \sum_\alpha <\Phi_N|\psi^+_\alpha(\mathbf{r}_1)\, \psi_\alpha(\mathbf{r}_2)|\Phi_N> \tag{4}$$

を調べればよい。交換関係

$$[\psi_\alpha(\mathbf{r}), (Q^+)^{N/2}] = N\sum_\beta \int d^3r_1\, \varphi(\mathbf{r}i, \mathbf{r})\, \chi^\mu_{\beta\alpha}\, \psi^+_{\beta\alpha}(\mathbf{r}_1)\, (Q^+)^{\frac{N-2}{2}} \tag{5}$$

を用いることにより，

$$\phi^N(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \sum_{\alpha\beta}\int d^3r'_1\, \hat{\varphi}^{N}_{\mu}{}^{*}(\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}_1)\, \chi^{\mu *}_{\beta\alpha}\, \Psi^N_{\beta\alpha}(\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}_2) \tag{6}$$

が得られる。ここで

$$\hat{\varphi}^N_\mu(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \equiv \frac{A_{N-2}}{A_N}\, N\varphi_\mu(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \tag{7}$$

であり，$\varphi_\mu(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ を

$$\sum_\mu \iint d^3r_1 d^3r_2\, |\varphi_\mu(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)|^2 = \frac{1}{N} \tag{8}$$

となるように規格化しておくと，$A_N \simeq 1$，$A_{N-2} \simeq \sqrt{N}$ となり，$\hat{\varphi}^N_\mu(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ の規格化は

$$\sum_\mu \iint d^3r_1 d^3r_2\, |\hat{\varphi}^N_\mu(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)|^2 = N^2 \tag{9}$$

である。又

$$\Psi^{N}_{\alpha\beta}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2) \equiv <\Phi_{N-2}\,|\,\psi_\alpha(\mathbf{r}_1)\psi_\beta(\mathbf{r}_2)\,|\,\Phi_N> \tag{10}$$

は系のオーダーパラメータである。従って系の全軌道角運動量は

$$<\mathbf{L}>=\sum_{\alpha\beta}\int\int d^3r_1 d^3r_2\,\hat{\varphi}^{N*}_{\mu}(\mathbf{r}_2,\mathbf{r}_1)\,\chi^{\mu*}_{\beta\alpha}\,\mathbf{r}_1\times(-i\hbar\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}})\,\Psi^{N}_{\beta\alpha}(\mathbf{r}_2,\mathbf{r}_1) \tag{11}$$

で与えられる。

流れのない一様な基底状態を考えよう。相対座標 $\mathbf{r}=\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1$ を用いることによって,

$$<\mathbf{L}>=\frac{1}{2}V\sum_{\alpha\beta}\int d^3\mathbf{r}\,\hat{\varphi}^{N*}_{\mu}(\mathbf{r})\,\chi^{\mu*}_{\beta\alpha}\,\mathbf{r}\times(-i\hbar\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}})\,\Psi^{N}_{\beta\alpha}(\mathbf{r}) \tag{12}$$

となる。ABM state の様な $l_z=1$ の固有状態

$$[\mathbf{r}\times(-i\hbar\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}})]_z\,\Psi^{N}_{\alpha\beta}(\mathbf{r})=\hbar\,\Psi^{N}_{\alpha\beta}(\mathbf{r}) \tag{13}$$

で与えられる軸対称対状態では系の全角運動量は結局

$$\begin{aligned}<L_z>&=\frac{1}{2}\hbar V\sum_{\alpha\beta}\int d^3r\,\hat{\varphi}^{N*}_{\mu}(\mathbf{r})\,\chi^{\mu*}_{\beta\alpha}\,\Psi^{N}_{\beta\alpha}(\mathbf{r})=\frac{1}{2}\hbar\int d^3r_1\,\phi^{N}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_1)\\&=\frac{N}{2}\hbar\end{aligned} \tag{14}$$

で与えられる。

系の全相対軌道角運動量には凝縮対の数ではなく，すべての粒子対が寄与することになる。これは T＝0 では凝縮対波動関数の位相 θ で表わされる超流動速度 $\mathbf{v}_s\ \frac{\hbar}{2m}\nabla\theta$ によって全質量が運ばれることと対比される。

以上の計算方法では有限温度の取扱いは難かしいが，その場合には全相対軌道角運動量に寄与する粒子対の数は $\frac{N}{2}$ から減少して $\frac{N_L(T)}{2}$ になる。$(0\leq N_L(T)\leq N)$ $T\to 0$ で $N_L(T)\to N$, $T\to T_c$ で $N_L(T)\to 0$ であるが，$N_L(T)$ が超流動粒子数 $N_s=\rho_s V$ と同じものであるかどうかは検討されなければならない。従って有限温度では,

$$<L_z> = \frac{N_L(T)}{2}\hbar \tag{15}$$

となる。

Ⅲ。次に全相対軌道角運動量に基底状態ではすべての粒子対が寄与する様な Cooper 対の構造を，ABM－state の場合に考察する。

(6) 式を導いたのと同様にして関係式

$$\Psi^{N}_{\alpha\beta}(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \hat{\varphi}^{N}_{\mu}(\mathbf{r},\mathbf{r}')\,\chi^{\mu}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\int d^3r_1\,\phi^{N-2}(\mathbf{r},\mathbf{r}_1)\,\hat{\varphi}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}')\,\chi^{\mu}_{\alpha\beta} \tag{16}$$

が得られる。 (6)式を用いて(16)式を書きかえると

$$\Psi^{N}_{\alpha\beta}(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \hat{\varphi}^{N}_{\mu}(\mathbf{r},\mathbf{r}')\,\chi^{\mu}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\sum_{\gamma\delta}\iint d^3r_1 d^3r_2\,\hat{\varphi}^{N}_{\mu}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}')\,\chi^{\mu}_{\alpha\beta} \times \overset{*}{\hat{\varphi}}{}^{N-2}_{\mu}(\mathbf{r}_2,\mathbf{r})\,\overset{*}{\chi}{}^{\nu}_{\delta\gamma}\,\Psi^{N-2}_{\delta\gamma}(\mathbf{r}_2,\mathbf{r}_1) \tag{17}$$

となる。(17) 式は N→∞で解くことが出来る。 $\mathbf{u}_s = 0$ で一様な場合に Fourier 変換することにより，

$$\Psi^{N}_{\alpha\beta}(\mathbf{p}) = \hat{\varphi}^{N}_{\mu}(\mathbf{p})\,\chi^{\mu}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\,\hat{\varphi}^{N}_{\mu}(\mathbf{p})\,\chi^{\mu}_{\alpha\beta}\,\overset{*}{\hat{\varphi}}{}^{N-2}_{\nu}(\mathbf{p})\,\overset{*}{\chi}{}^{\nu}_{\delta\gamma}\,\Psi^{N-2}_{\delta\gamma}(\mathbf{p}) \tag{17'}$$

又(6) 式は

$$\phi^{N}(\mathbf{p}) = \hat{\varphi}^{N*}_{\mu}(\mathbf{p})\,\overset{*}{\chi}{}^{\mu}_{\alpha\beta}\,\Psi^{N}_{\beta\alpha}(\mathbf{p}) \tag{6'}$$

となる。$\Psi^{N}_{\alpha\beta}(\mathbf{p}) \simeq \Psi^{N-2}_{\alpha\beta}(\mathbf{p})$ ， $\hat{\varphi}^{N}_{\mu}(\mathbf{p}) \simeq \hat{\varphi}^{N-2}_{\mu}(\mathbf{p})$ であるから(17′)式を解くと，

$$\Psi^{N}_{\alpha\beta}(\mathbf{p}) = \frac{\hat{\varphi}^{N}_{\mu}(\mathbf{p})\,\chi^{\mu}_{\alpha\beta}}{1 + \sum_{\mu} |\hat{\varphi}^{N}_{\mu}(\mathbf{p})|^2} \tag{18}$$

が，(18) 式と (6′) 式から

$$\phi^{N}(\mathbf{p}) = 2\,\frac{\sum_{\mu} |\hat{\varphi}^{N}_{\mu}(\mathbf{p})|^2}{1 + \sum_{\mu} |\hat{\varphi}^{N}_{\mu}(\mathbf{p})|^2} \tag{19}$$

が得られる。

ここで $\hat{\varphi}^{N}_{\mu}(\mathbf{p})$, $\Psi^{N}_{\alpha\beta}(\mathbf{p})$, $\phi^{N}(\mathbf{p})$ の大きさについて述べておこう。 $p_F - p \gg \frac{1}{\xi}$ では $\hat{\varphi}^{N}(\mathbf{p}) \sim \sqrt{N}$ ， $\Psi^{N}_{\alpha\beta}(\mathbf{p}) \sim \frac{1}{\sqrt{N}}$ $\phi^{N}(\mathbf{p}) \simeq 1$ であり， $p \sim p_F$ では $\hat{\varphi}(\mathbf{p}) \sim 1$, $\Psi^{N}_{\alpha\beta}(\mathbf{p}) \sim 1$, $\phi^{N}(\mathbf{p}) \sim 1$ である。Nが有限である限り $\Psi^{N}_{\alpha\beta}(\mathbf{p})$ は正常状態でも $\frac{1}{\sqrt{N}}$ の程度の大きさを持っていることに注意しておこう。ξ は coherence length である。

Bogoliubov −変換のパラメータは $\hat{\varphi}_\mu^N(\mathbf{p})$ によって次の様に与えられる。

$$\left.\begin{aligned} u(\mathbf{p}) &= \left[1+\sum_\mu \left|\hat{\varphi}_\mu^N(\mathbf{p})\right|^2\right]^{-1/2} \\ v_{\alpha\beta}(\mathbf{p}) &= \hat{\varphi}_\mu^N(\mathbf{p})\,\chi_{\alpha\beta}^\mu \left[1+\sum_\mu \left|\hat{\varphi}_\mu^N(\mathbf{p})\right|^2\right]^{-1/2} \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

BCS 理論における gapパラメータを用いて表わすと,

$$\left.\begin{aligned} u(\mathbf{p}) &= \left[(E\mathbf{p}+\xi\mathrm{p})/2E\mathbf{p}\right]^{-1/2} \\ v_{\alpha\beta}(\mathbf{p}) &= \triangle_{\alpha\beta}(\mathbf{p}) \left[2E\mathbf{p}\,(E\mathbf{p}+\xi\mathrm{p})\right]^{-1/2} \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

$$E\mathbf{p}^2 = \xi\mathrm{p}^2 + \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\,\triangle^+(\mathbf{p})\triangle(\mathbf{p})$$

となる。^{3}He の超流動相に於ては gap パラメータが p −波依存性を持ち, ABM−state では

$$\triangle_{\alpha\beta}(\mathbf{p}) = \triangle\,(\hat{p}_x + i\,\hat{p}_y)(\sigma_z i\sigma_y)_{\alpha\beta} \tag{22}$$

の構造をもつとされた。この場合には $\hat{\varphi}_\mu^N(\mathbf{p})$ は

$$\hat{\varphi}_z^N(\mathbf{p}) = \frac{\triangle(\hat{p}_x + i\,\hat{p}_y)}{E\mathrm{p}+\xi\mathrm{p}} \tag{23}$$

となり, $\hat{\varphi}_z^N(\mathbf{p})$ は Ep の方向依存性がある為に p −波ではないが, $\triangle_{\alpha\beta}(\mathbf{p})$ と同様 $l_z=1$ の固有状態である。(18) 式により $\Psi_{\alpha\beta}^N(\mathbf{p})$ についても同様である。従ってこの場合には系の全相対軌道角運動量は凝縮対の数

$$N_0 \equiv \frac{1}{2}\sum_{\alpha\beta}\iint d^3r_1 d^3r_2 \left|\Psi_{\alpha\beta}^N(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)\right|^2 = N\frac{\triangle}{\varepsilon_F} \tag{24}$$

によって決められるのではなく (14)式の結果により与えられる。 $\xi\mathrm{p} \ll -\triangle$ の時には

$$\hat{\varphi}_z^N(\mathbf{p}) \simeq \sqrt{N}\;\; e^{i\phi\mathrm{p}} \tag{25}$$

となる。 ϕp は p の z 軸のまわりの偏角である。ABM− stateでは Fermi 面近傍の粒子対状態の影響が $e^{i\phi p}$ という位相依存性で Fermi 球のずっと深部にまで及んでおり normal state とは異っていると見倣すべきであろう。これが全相対軌道角運動量を担っている粒子対の数が凝縮対の数ではなく, 全粒子対となった原因である。

以上述べた事はABM－state が normal state と空間的対称性が異っていることによっている。従って$\triangle \to 0$ の極限で Leggett の主張と異って normal state に移行しない。ここで極限操作には若干の注意が必要である。系の粒子数 $N \to \infty$ ($N/V = \mathrm{const}$) の後に$\triangle \to 0$ とする必要がある。$\triangle \to 0$ の極限で Cooper 対の拡がりξが$\xi \to \infty$となり，系の大きさがξより大きくないとp－波対であることは表現できない。実際に系の粒子数Nを固定したまま$\triangle \to 0$ の極限をとると，

$$\hat{\varphi}_z^N(\mathbf{p}) = \sqrt{N}\ e^{i\phi_p}\ \theta(p_F - p) \tag{26}$$

となるがこれを(1)式に代入すると normal state に移行する。しかし先に$N \to \infty$ の極限をとると$\triangle \to 0$ で normal state に移行し得ない。熱力学的極限では二次の相転移においてオーダーパラメータを0にする極限操作によって，対称性の異る相へは移行することはできない[5]。今の場合系の相対角運動量は対称性の表現であり，ABM－state は空間的対称性の破れた状態である。(註)

Ⅳ。Ⅰの計算を拡張することによって流れのある一様でない系の軌道角運動量密度を求めることが出来る。Cooper 対の拡がりが coherence length ξ の程度であるから，軌道角運動量密度を相対軌道角運動量と Cooper 対の重心運動による部分とに分離する為にはξ程度の体積で平均した量で考えなければならない。そこで次の様に定義する。

$$\mathbf{L}(\mathbf{X}) \equiv \frac{1}{\lambda^3} \iint_{|\mathbf{r}-\mathbf{X}| \leq \lambda} d^3r\, d^3r'\ \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\ \mathbf{r} \times \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right) \phi^N(\mathbf{r}', \mathbf{r})$$

$$= \frac{1}{\lambda^3} \sum_{\alpha\beta} \iint_{|\mathbf{r}-\mathbf{X}| \leq \lambda} d^3r\, d^3r'\ \hat{\varphi}_\mu^{N*}(\mathbf{r}', \mathbf{r})\ \chi_{\alpha\beta}^\mu\ \mathbf{r} \times \left(-ih \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right) \Psi_{\alpha\beta}^N(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \tag{27}$$

ここで$\lambda \gtrsim \xi$ である。前の計算と同様にして重心座標 $\mathbf{R} = \frac{1}{2}(\mathbf{r}' + \mathbf{r})$， 相対座標 $\mathbf{x} = \mathbf{r}' - \mathbf{r}$ を用いると，

(註) 等方的な Heisenberg model

$$H = -J \sum_{ij} s_i \cdot s_j \qquad (JZ_0)$$

を考える。$T/J \to 0$，$J \to 0$ の極限で系は強磁性状態である。 total spin はJの大きさに関わりなく $S_z = NS$で与えられる。ところが $J = 0$，$T \to 0$ の極限では系は常磁性状態であり， $S_z = 0$ である。つまり $T \to 0$ の極限で， $J \neq 0$の状態は決して $J = 0$ の状態に繋らない。

$$\mathbf{L}(\mathbf{X})=\frac{1}{\lambda^3}\sum_{\alpha\beta}\iint_{|\mathbf{R}-\frac{1}{2}\mathbf{x}-\mathbf{X}|\leq\lambda} d^3R\,d^3\mathbf{x}\quad \hat{\varphi}^{N*}_{\mu}(\mathbf{x};\mathbf{R})\,\chi^{\mu*}_{\alpha\beta}\,\mathbf{R}\times(-i\hbar)\left(\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\mathbf{R}}-\frac{\partial}{\partial\mathbf{x}}\right)$$

$$\times\,\Psi^{N}_{\alpha\beta}(\mathbf{x};\mathbf{R})+\frac{1}{\lambda^3}\sum_{\alpha\beta}\iint_{|\mathbf{R}-\frac{1}{2}\mathbf{x}-\mathbf{X}|\leq\lambda} d^3R\,d^3x\quad \hat{\varphi}^{N}_{\mu}(\mathbf{x};\mathbf{R})\,\chi^{\mu}_{\alpha\beta}$$

$$\times\frac{1}{2}\,\mathbf{x}\times(-i\hbar)\left(-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\mathbf{R}}+\frac{\partial}{\partial\mathbf{x}}\right)\Psi^{N}_{\alpha\beta}(\mathbf{x};\mathbf{R}) \tag{28}$$

となる。粒子密度 $n(X)=\phi^N(X,X)$，超流動速度 $\mathbf{v}_s(X)$，Cooper 対の軌道角運動量 $\boldsymbol{\ell}(X)$ は ξ より十分に大きい領域でゆっくり変化しているものとすると，(28)式は次の様になる。

$$\mathbf{L}(\mathbf{X})=\mathbf{X}\times\mathbf{j}(\mathbf{X})+\frac{1}{2}\,n(\mathbf{X})\,\hbar\,\boldsymbol{\ell}(\mathbf{X}) \tag{29}$$

ここで

$$\mathbf{j}(\mathbf{X})=\frac{1}{2\lambda^3}\sum_{\alpha\beta}\iint_{|\mathbf{R}-\frac{1}{2}\mathbf{x}-\mathbf{X}|\leq\lambda} d^3R\,d^3x\quad \hat{\varphi}^{N*}_{\mu}(\mathbf{x};\mathbf{R})\,\chi^{\mu*}_{\alpha\beta}(-i\hbar)\left(\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\mathbf{R}}-\frac{\partial}{\partial\mathbf{x}}\right)$$

$$\times\,\Psi^{N}_{\alpha\beta}(\mathbf{x};\mathbf{R})\;+\;\text{c.c.}$$

$$=\frac{1}{\lambda^3}\iint_{|\mathbf{r}-\mathbf{X}|\leq\lambda} d^3\mathbf{r}\,d^3\mathbf{r}'\,\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')(-i\hbar)\left(\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}-\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}'}\right)\phi^N(\mathbf{r}';\mathbf{r}) \tag{30}$$

は mass current であり，weak coupling 近似で Gor'kov 方程式を用いて求めると，

$$\mathbf{j}(\mathbf{X})=mn(\mathbf{X})\,\mathbf{v}_s(\mathbf{X})+\frac{1}{2}\,mn(\mathbf{X})\,\mathbf{C}\cdot\mathbf{v}_r(\mathbf{X}) \tag{31}$$

$$\left.\begin{aligned}&C_{ij}=\delta_{ij}-2\,\ell_i(\mathbf{X})\,\ell_j(\mathbf{X})\\&\mathbf{v}_s(\mathbf{X})=\frac{\hbar}{2m}\frac{\partial}{\partial\mathbf{X}}\,\theta(\mathbf{X})\;,\quad \mathbf{v}_r(\mathbf{X})=\frac{\hbar}{2m}\frac{\partial}{\partial\mathbf{X}}\times\boldsymbol{\ell}(\mathbf{X})\end{aligned}\right\} \tag{32}$$

となる。[6] $\theta(X)$ は $\Psi^N_{\alpha\beta}$ の Cooper 対の重心運動による位相である。

V。最後に Leggett の全相対軌道角運動量の計算において誤りと思われる点を指摘しておく。彼は相対軌道角運動量演算子

$$\mathbf{L}^{\mathrm{I}} = \frac{1}{2N}\sum_{ij}(\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_j)\times(\mathbf{p}_i-\mathbf{p}_j) = \sum_j \mathbf{r}_i\times\mathbf{p}_i - \frac{1}{N}\mathbf{r}_i\times\sum_j \mathbf{p}_j \tag{33}$$

の期待値を，凝縮対波動関数を用いて

$$<\mathbf{L}^{\mathrm{I}}> = \frac{1}{2N}\sum_{\alpha\beta}\iint d^3R\,d^3r\,\Psi^{+}_{\alpha\beta}\left(\mathbf{R}+\frac{\mathbf{r}}{2},\ \mathbf{R}-\frac{\mathbf{r}}{2}\right)\mathbf{r}\times\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\right)\Psi_{\beta\alpha}\left(\mathbf{R}-\frac{\mathbf{r}}{2},\ \mathbf{R}+\frac{\mathbf{r}}{2}\right) \tag{34}$$

により計算し，$<L^{\mathrm{I}}_z> = \frac{1}{2}\hbar\frac{\triangle}{E_F}$ を得た。これは粒子数について 0(1) である。(33) 式の演算子の(1)式の状態による期待値を正確に書くと，

$$<\Phi_N|\mathbf{L}^{\mathrm{I}}|\Phi_N> = \frac{1}{2N}\sum_{\alpha\beta}\iiint d^3R\,d^3r\,d^3r'\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\,\mathbf{r}\times\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\right)\times<\Phi_N|\psi^{+}_{\alpha}\left(\mathbf{R}+\frac{\mathbf{r}'}{2}\right)\psi^{+}_{\beta}\left(\mathbf{R}-\frac{\mathbf{r}}{2}\right)\psi_{\alpha}\left(\mathbf{R}+\frac{\mathbf{r}}{2}\right)|\Phi_N> \tag{35}$$

となる。この式を検討してみよう。２体の density matrix

$$\phi^N(\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2\ ;\ \mathbf{r}_3\mathbf{r}_4) \equiv \sum_{\alpha\beta}<\Phi_N|\psi^{+}_{\alpha}(\mathbf{r}_1)\psi^{+}_{\beta}(\mathbf{r}_2)\psi_{\beta}(\mathbf{r}_4)\psi_{\alpha}(\mathbf{r}_3)|\Phi_N> \tag{36}$$

は $|\Phi_N>$ が (1) 式により与えられる時には厳密に次の様に分解される。

$$\phi^N(\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2\ ;\ \mathbf{r}_3\mathbf{r}_4) = \sum_{\alpha\beta}\Psi^{N^+}_{\alpha\beta}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)\,\Psi^{N}_{\beta\alpha}(\mathbf{r}_3,\mathbf{r}_4) + \phi^N(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_3)\,\phi^N(\mathbf{r}_2,\mathbf{r}_4) - \frac{1}{2}\phi^N(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_4)\,\phi^N(\mathbf{r}_2,\mathbf{r}_3) \tag{37}$$

従って (35) 式は次の様に書きかえられる。

$$\begin{aligned}<\Phi_N|\mathbf{L}^{\mathrm{I}}|\Phi_N> &= \frac{1}{2N}\sum\iint d^3R\,d^3r\,\Psi^{N^+}_{\alpha\beta}\left(\mathbf{R}+\frac{\mathbf{r}}{2},\mathbf{R}-\frac{\mathbf{r}}{2}\right)\mathbf{r}\times\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\right)\Psi^{N}_{\beta\alpha}\left(\mathbf{R}-\frac{\mathbf{r}}{2},\ \mathbf{R}+\frac{\mathbf{r}}{2}\right)\\ &+\frac{1}{N}\iiint d^3R\,d^3r\,d^3r'\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\,\phi^N\left(\mathbf{R}-\frac{\mathbf{r}}{2},\mathbf{R}-\frac{\mathbf{r}}{2}\right)\mathbf{r}\times\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\right)\phi^N\left(\mathbf{R}+\frac{\mathbf{r}'}{2},\ \mathbf{R}+\frac{\mathbf{r}}{2}\right)\\ &-\frac{1}{2N}\iiint d^3R\,d^3r\,d^3r'\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\,\phi^N\left(\mathbf{R}+\frac{\mathbf{r}}{2},\mathbf{R}-\frac{\mathbf{r}}{2}\right)\mathbf{r}\times\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\right)\phi^N\left(\mathbf{R}-\frac{\mathbf{r}'}{2},\ \mathbf{R}+\frac{\mathbf{r}}{2}\right)\end{aligned} \tag{38}$$

第１項は Leggett の計算した項である。第２項を書き換えると

$$\iint d^3r d^3r' \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\, \mathbf{r} \times \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right) \phi^N(\mathbf{r}', \mathbf{r})$$

$$-\frac{1}{N} \int d^3\mathbf{r}\, \mathbf{r}\phi^N(\mathbf{r}, \mathbf{r}) \times \iint d^3r d^3r' \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right) \phi^N(\mathbf{r}', \mathbf{r})$$

となる。この第1項は我々の計算した全軌道角運動量であり，第2項は前節で出て来た Cooper 対の重心運動による軌道角運動量である。いずれも O (N) である。(38)式の第3項は (6) 式を用いると

$$-\frac{1}{2N} \sum_{\alpha\beta} \iint d^3R d^3r\, \Psi^{N+}_{\alpha\beta}\left(\mathbf{R}+\frac{\mathbf{r}}{2},\ \mathbf{R}-\frac{\mathbf{r}}{2}\right) \mathbf{r}$$

$$\times \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right) \Psi^{N}_{\beta\alpha}\left(\mathbf{R}-\frac{\mathbf{r}}{2},\ \mathbf{R}+\frac{\mathbf{r}}{2}\right) + O(1)$$

と書き変えることが出き，(38) 式の第1項を打ち消す。残りの O(1) の項は (33) 式右辺の重心運動による角運動量演算子の期待値を1体の density matrix を用いて表わしたことによる補正項と考えられる。

以上から Cooper 対の相対運動による軌道角運動量は凝縮対波動関数を用いた2本の演算子の期待値 (34)式では正しく与えられず，我々が計算した様に (3) 式 を直接計算しなければならないことがわかる。

この問題を考察するに当り，共に議論をし有効な示唆を与えていただいた碓井恒丸教授並びに山内淳氏に感謝します。

参 考 文 献

(1) P. W. Anderson and P. Morel, Phys. Rev. 123 (1961) 1191

(2) A. J. Leggett, Rev. Mod. Phys. 47 (1975) 331

(3) M. C. Cross and P W. Anderson, LT 14 報告

(4) V. Ambegaokar, " Superconductivity " (R.D. Parks, ed.)

(5) 例えばランダウ＝リフシッツ統計物理学

(6) P. Wölfle, Phys. Lett. 47 A (1974) 224

計算方法については

E. Abrahams and T. Tsuneto, Phys. Rev. 152 (1966) 416